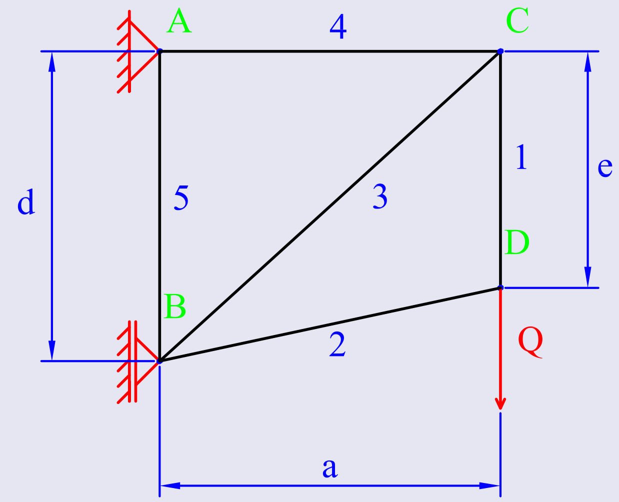
Výpočet napětí v prutech a posunutí bodu

Staticky určitá prutová soustava je zatížena silou $\vec{Q}$. Výpočítejte napětí v prutech. Rozměry jsou $a = 0.5\,\mathrm{m}$, $d = 0.5\,\mathrm{m}$, $e = \left(0.5 - \sqrt{3}/6\right)\,\mathrm{m}$




Soustava je staticky určitá. Pro body A, B, C a D napíšeme rovnice rovnováhy v ose x a y.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

Získáme 8 rovnic s neznámými $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$, $R_{Ax}$, $R_{Ay}$ a $R_B$.

A:

$$F_4 + R_{Ax} = 0$$
$$-F_5 + R_{Ay} = 0$$

B:

$$F_{2x} + F_{3x} + R_B = 0$$
$$F_{2y} + F_{3y} + F_5 = 0$$

C:

$$-F_{3x} - F_4 = 0$$
$$-F_1 - F_{3y} = 0$$

D:

$$-F_{2x} = 0$$
$$F_1 - F_{2y} - Q = 0$$

Pro složky platí:

$$F_{2x} = F_2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + (d-e)^2}} = F_2 k_{2x} = F_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{2y} = F_2 \frac{d-e}{\sqrt{a^2 + (d-e)^2}} = F_2 k_{2y} = F_2 \frac{1}{2}$$

$$F_{3x} = F_2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} = F_3 k_{3x} = F_3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_{3y} = F_2 \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} = F_3 k_{3y} = F_3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vytvořeno pro studenty FVTM UJEP

Připomínky a náměty posílejte na vyslouzil@fvtm.ujep.cz

Rovnice je možné řešit maticově

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_{2x} & k_{3x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_{2y} & k_{3y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{3x} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -k_{3y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{2x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -k_{2y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}$$

symbolicky tuto rovnici zapíšeme

$$\mathbf{Af} = \mathbf{q},$$

kde $\mathbf{f}$ je matice neznámých sil v prutech a reakcí a $\mathbf{q}$ je matice zatěžujících sil. Vynásobením inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ získáme maticovou rovnici pro výpočet neznámých.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Af} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}$$

nyní pro výpočet posunutí zavedeme v požadovaném bodě jednotkovou sílu v požadovaném směru posunutí. Vypočítáme síly v prutech od této jednotkové síly.

$$\mathbf{f}_p = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_B \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Af}_p = \mathbf{q}_p,$$

kde $\mathbf{f}_p$ je matice neznámých sil v prutech od jednotkové síly a $\mathbf{q}_p$ je matice zatěžujících sil - jednotková síla v bodu $D$ ve směru osy $y$. Maticová rovnice pro výpočet neznámých $\mathbf{f}_p$:

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}_p$$

Pro výpočet posunutí $u_j$ použijeme vzorec:

$$u_j = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial U_i}{\partial f_j}$$

$$U_i = \frac{F_i^2}{2k_i}$$

$$u_j = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial U_i}{\partial f_j} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2k_i} \frac{\partial F_i^2}{\partial f_j} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2k_i} 2F_i \frac{\partial F_i}{\partial f_j} = \sum_{i=1}^{5} \frac{F_i}{k_i} \frac{\partial F_i}{\partial f_j}$$

$\dfrac{\partial F_i}{\partial f_j}$ je derivace síly v $i$-tém prutu podle síly $f_j$. Protože jsme použili jednotkovou sílu, je tato derivace rovna $\mathbf{f}_p[i,1]$.

Posunutí bodu D ve směru osy $y$ je tedy

$$u_y(D) = \sum_{i=1}^{5} \frac{F_i}{k_i} \mathbf{f}_p[i,1]$$

Výpočet ostatních posunutí se provede upravením matice $\mathbf{q}_p$.

Maticový výpočet v EXCELu je proveden v http://vyslouzil.fvtm.ujep.cz/pp/pp-priklady5.xls


Připomínky a náměty posílejte na vyslouzil@fvtm.ujep.cz