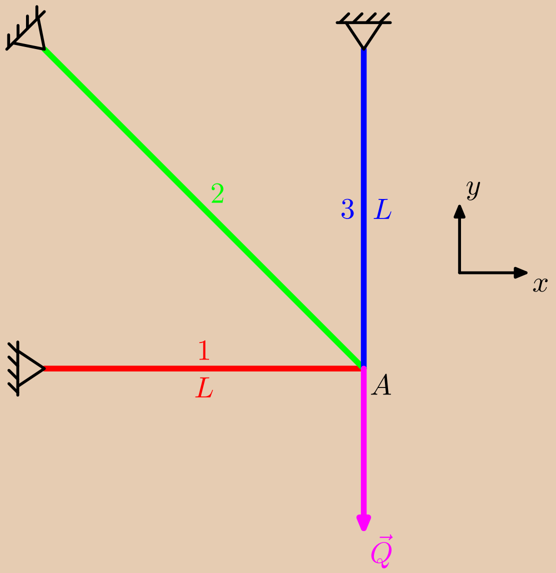
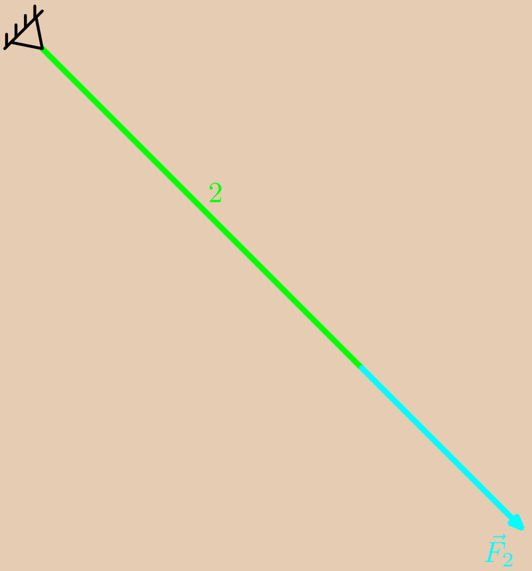
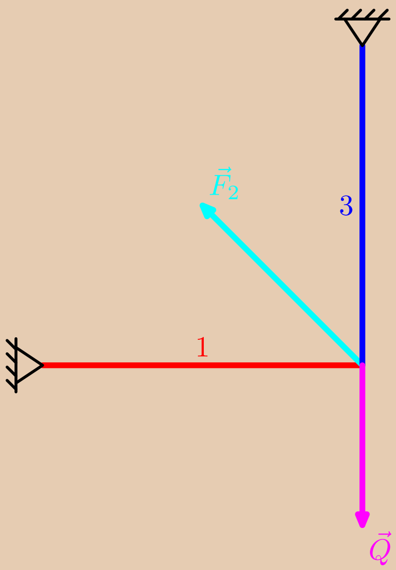
Výpočet napětí v prutech a posunutí bodu

Staticky neurčitá prutová soustava je zatížena silou $\vec{Q}$. Výpočítejte napětí v prutech a posunutí bodu L.



Soustava je staticky neurčitá. Odstaraníme prut 2 a zavedeme tahovou sílu F_2 působící v prutu 2. Tím získáme staticky určitou prutovou soustavu zatíženou silou F_2 a Q.





Vypočteme velikosti sil v prutech.

$$\sum F_x = 0: \qquad -F_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad F_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_2 - Q = 0$$

$$F_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2$$

$$F_3 = Q - \frac{\sqrt{2}}{2} F_2$$

Vypočteme energii jednotlivých prutů.

$$U_2 = \frac{{F_2}^2 \sqrt{2} L}{2ES}$$

$$U_1 = \frac{{F_1}^2 L}{2ES} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} F_2\right)^2 L}{2ES} = \frac{{F_2}^2 L}{4ES}$$

$$U_3 = \frac{{F_3}^2 L}{2ES} = \frac{\left(Q - \frac{\sqrt{2}}{2} F_2\right)^2 L}{2ES} = \frac{\left(2Q - \sqrt{2} F_2\right)^2 L}{8ES} = \frac{\left(4Q^2 - 4\sqrt{2} Q F_2 + 2{F_2}^2\right) L}{8ES}$$

Energie sečteme a zderivujeme podle síly F_2. Derivaci položíme rovnu nule (při minimální energii je derivace rovna nule) a získáme tak velikost síly F_2.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{{F_2}^2 L}{4ES} + \frac{{F_2}^2 \sqrt{2} L}{2ES} + \frac{\left(4Q^2 - 4\sqrt{2} Q F_2 + 2{F_2}^2\right) L}{8ES} =$$

$$= \frac{\left(4Q^2 - 4\sqrt{2} Q F_2 + 4(1+\sqrt{2}){F_2}^2\right) L}{8ES}$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{\left(-4\sqrt{2} Q + 8(1+\sqrt{2}) F_2\right) L}{8ES} = 0$$

$$-4\sqrt{2} Q + 8(1+\sqrt{2}) F_2 = 0$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} Q = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} Q = \frac{2-\sqrt{2}}{2} Q$$

Vypočítáme síly a napětí v prutech.

$$F_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_2 = -\frac{\sqrt{2}-1}{2} Q = \frac{1-\sqrt{2}}{2} Q$$

$$F_3 = Q - \frac{\sqrt{2}}{2} F_2 = Q - \frac{\sqrt{2}-1}{2} Q = Q + \frac{1-\sqrt{2}}{2} Q = \frac{3-\sqrt{2}}{2} Q$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right) Q}{2S}$$

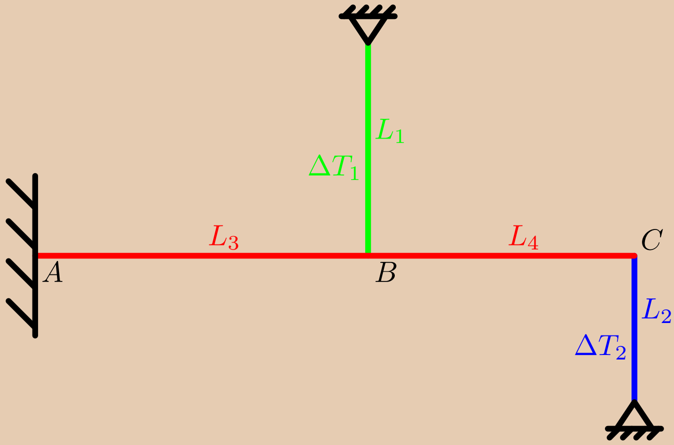
$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)Q}{2S}$$

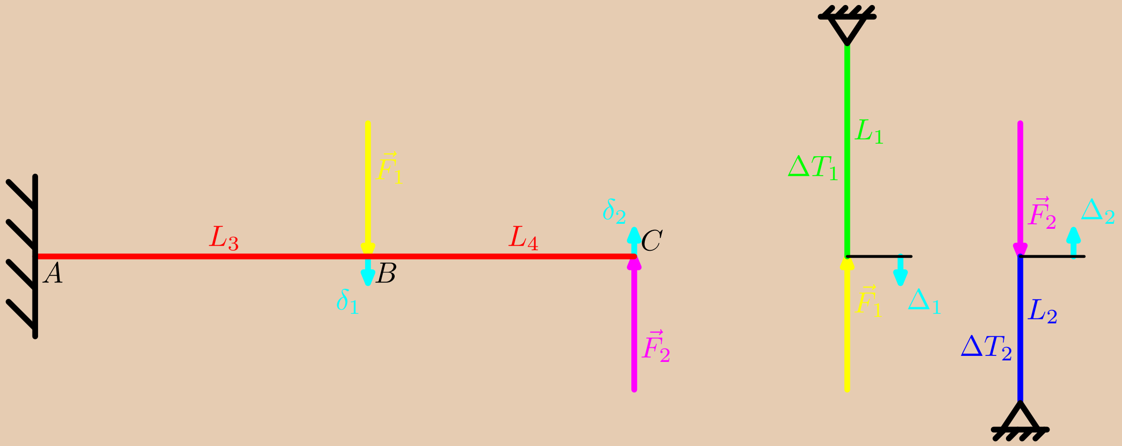
$$\sigma_3 = \frac{F_3}{S} = \frac{\left(3-\sqrt{2}\right)Q}{2S}$$

Posunutí bodu A ve směru osy y a x je

$$u_y = -\frac{F_3 L}{ES} = -\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)QL}{2ES}$$

$$u_x = \frac{F_1 L}{ES} = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)QL}{2ES}$$





Výpočet prodloužení tyčí v místě B a C

$$\Delta_1 = \alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{E S_1}$$

$$\Delta_2 = \alpha \Delta T_2 L_2 - \frac{F_2 L_2}{E S_2}$$

Výpočet průhybu v místě B a C

$$\delta_1 = \frac{F_1 {L_3}^3}{3EI} - \frac{F_2 {L_3}^3}{3EI} - \frac{F_2 L_4 {L_3}^2}{2EI} = \frac{F_1 {L_3}^3}{3EI} - (2L_3 + 3L_4)\frac{F_2 {L_3}^2}{6EI}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 (L_3 + L_4)^3}{3EI} - \frac{F_1 {L_3}^3}{3EI} - \frac{F_1 L_4 {L_3}^2}{2EI} = \frac{F_2 (L_3 + L_4)^3}{3EI} - (2L_3 + 3L_4)\frac{F_1 {L_3}^2}{6EI}$$

Rovnosti posunutí a průhybů:

$$\Delta_1 = \delta_1$$

$$\Delta_2 = \delta_2$$

$$\alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{E S_1} = \frac{F_1 {L_3}^3}{3EI} - (2L_3 + 3L_4)\frac{F_2 {L_3}^2}{6EI}$$

$$\alpha \Delta T_2 L_2 - \frac{F_2 L_2}{E S_2} = \frac{F_2 (L_3 + L_4)^3}{3EI} - (2L_3 + 3L_4)\frac{F_1 {L_3}^2}{6EI}$$

Získali jsme dvě rovnice o dvou neznámých F_1 a F_2.

Vypočteme napětí v tyčích délky L_1 a L_2.

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

Největší ohybové napětí nosníku bude v místě A nebo B.

$$\sigma_{oA} = \frac{M_{oA}}{W_o}$$

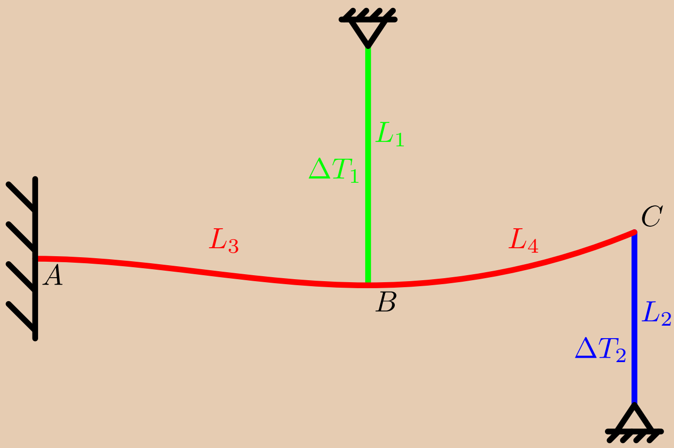
$$M_{oA} = -F_1 L_3 + F_2 (L_3 + L_4)$$

$$\sigma_{oA} = \frac{-F_1 L_3 + F_2 (L_3 + L_4)}{W_o}$$

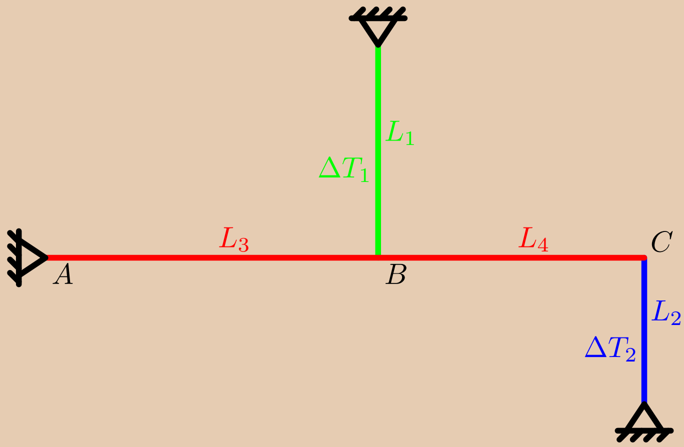
$$\sigma_{oB} = \frac{M_{oB}}{W_o}$$

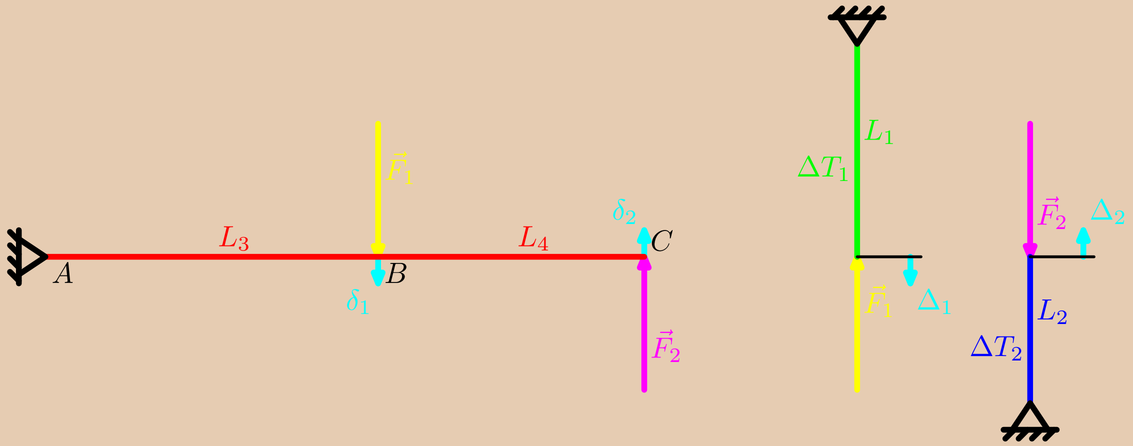
$$M_{oB} = F_2 L_4$$

$$\sigma_{oB} = \frac{F_2 L_4}{W_o}$$



Výsledný průhyb





Výpočet prodloužení tyčí v místě B a C

$$\Delta_1 = \alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{E S_1}$$

$$\Delta_2 = \alpha \Delta T_2 L_2 - \frac{F_2 L_2}{E S_2}$$

Nosník má jeden stupeň volnosti - rotační vazba odebírá pouze dva stupně volnosti. Musí být splněna momentová podmínka rovnováhy.

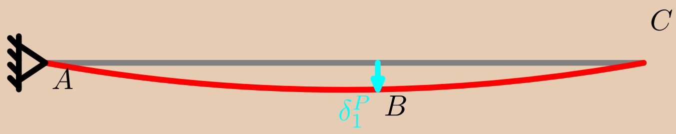
$$\sum M = 0 \qquad -F_1 L_3 + F_2 (L_3 + L_4) = 0$$

z této podmínky získáme vztah mezi silami F_1 a F_2

$$F_2 = F_1 \frac{L_3}{L_3 + L_4}$$

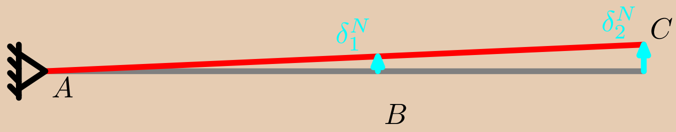
Výpočet posunutí δ_1 resp. δ_2 v místě B resp. C se vypočítá z průhybu nosníku na dvou podporách a natočení nosníku ϕ

(je možné řešit i jako průhyb vetknutého nosníku a natočení nosníku o úhel ψ)



Posunutí od průhybu

$$\delta_1^P = \frac{F_1 {L_3}^2 {L_4}^2}{3EI(L_3+L_4)} \qquad \delta_2^P = 0$$



Posunutí od natočení

$$\delta_1^N = \phi L_3 \qquad \delta_2^N = \phi(L_3+L_4)$$

$$\phi = \frac{\delta_1^N}{L_3} \qquad \phi = \frac{\delta_2^N}{L_3+L_4}$$

$$\frac{\delta_1^N}{L_3} = \frac{\delta_2^N}{L_3+L_4} \Rightarrow \delta_1^N = \delta_2^N \frac{L_3}{L_3+L_4}$$

Rovnosti prodloužení tyčí a průhybů:

$$\Delta_2 = \delta_2 = \delta_2^N$$

$$\Delta_1 = \delta_1 = \delta_1^P - \delta_1^N = \delta_1^P - \delta_2^N \frac{L_3}{L_3+L_4} = \delta_1^P - \Delta_2 \frac{L_3}{L_3+L_4}$$

$$\alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{ES_1} = \frac{F_1 {L_3}^2 {L_4}^2}{3EI(L_3+L_4)} - \left(\alpha \Delta T_2 L_2 - \frac{F_2 L_2}{ES_2}\right) \frac{L_3}{L_3+L_4}$$

Dosadíme $F_2 = F_1 \dfrac{L_3}{L_3+L_4}$

$$\alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{ES_1} = \frac{F_1 {L_3}^2 {L_4}^2}{3EI(L_3+L_4)} - \left(\alpha \Delta T_2 L_2 - \frac{F_1 L_3 L_2}{ES_2(L_3+L_4)}\right) \frac{L_3}{L_3+L_4}$$

Získali jsme jednu rovnici o jedné neznámé F_1

$$\alpha \Delta T_1 L_1 + \alpha \Delta T_2 L_2 \frac{L_3}{L_3+L_4} = \frac{F_1 L_1}{ES_1} + \frac{F_1 {L_3}^2 {L_4}^2}{3EI(L_3+L_4)} + \frac{F_1 L_3 L_2}{ES_2(L_3+L_4)} \frac{L_3}{L_3+L_4}$$

$$\alpha \Delta T_1 L_1 + \alpha \Delta T_2 L_2 \frac{L_3}{L_3+L_4} = \frac{F_1 L_1}{ES_1} + \frac{F_1 {L_3}^2 {L_4}^2}{3EI(L_3+L_4)} + \frac{F_1 L_3^2 L_2}{ES_2(L_3+L_4)^2}$$

$$F_1 = \frac{\dfrac{L_1}{ES_1} + \dfrac{{L_3}^2 {L_4}^2}{3EI(L_3+L_4)} + \dfrac{L_3^2 L_2}{ES_2(L_3+L_4)^2}}{\alpha \Delta T_1 L_1 + \alpha \Delta T_2 L_2 \dfrac{L_3}{L_3+L_4}}$$

$$F_1 = \frac{\dfrac{3S_2 I L_1 (L_3+L_4)^2 + {L_3}^2 {L_4}^2 S_1 S_2 (L_3+L_4) + 3S_1 I L_3^2 L_2}{3ES_1 S_2 I (L_3+L_4)^2}}{\dfrac{\alpha \Delta T_1 L_1 (L_3+L_4) + \alpha \Delta T_2 L_2 L_3}{L_3+L_4}}$$

$$F_1 = \frac{\frac{3S_2IL_1(L_3+L_4)^2 + {L_3}^2{L_4}^2S_1S_2(L_3+L_4) + 3S_1IL_3^2L_2}{3ES_1S_2I(L_3+L_4)}}{\alpha\Delta T_1 L_1(L_3+L_4) + \alpha\Delta T_2 L_2 L_3}$$

Vypočteme napětí v tyčích délky L_1 a L_2.

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

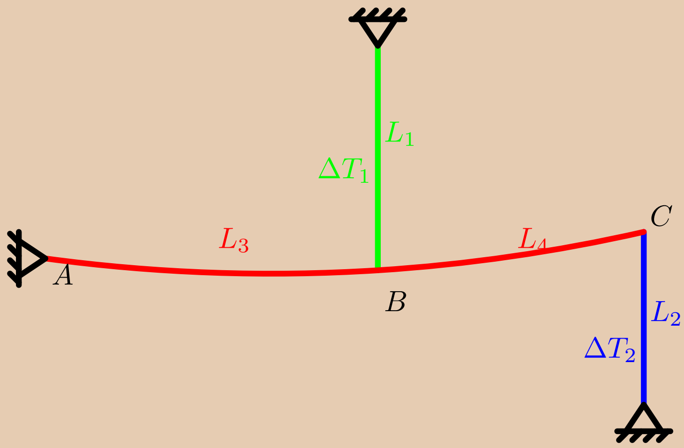
$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S_2} = F_1\frac{L_3}{(L_3+L_4)S_2}$$

Největší ohybové napětí nosníku bude v místě B.

$$\sigma_{oB} = \frac{M_{oB}}{W_o}$$

$$M_{oB} = F_2L_4 = F_1\frac{L_3L_4}{L_3+L_4}$$

$$\sigma_{oB} = F_1\frac{L_3L_4}{(L_3+L_4)W_o}$$



Výsledný průhyb