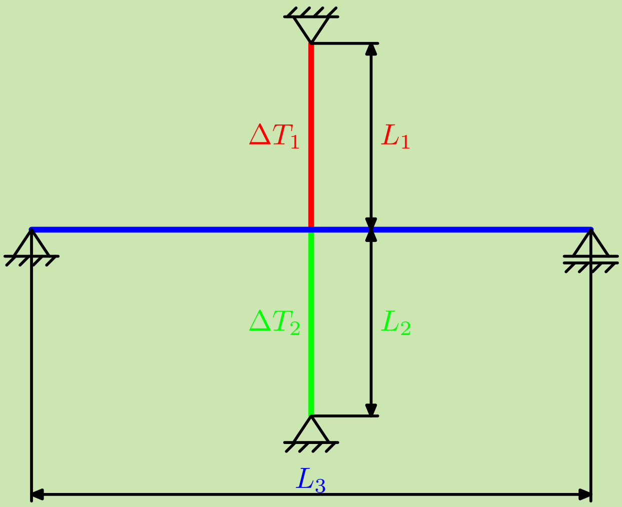
Výpočet napětí v prutech a průhybu nosníku

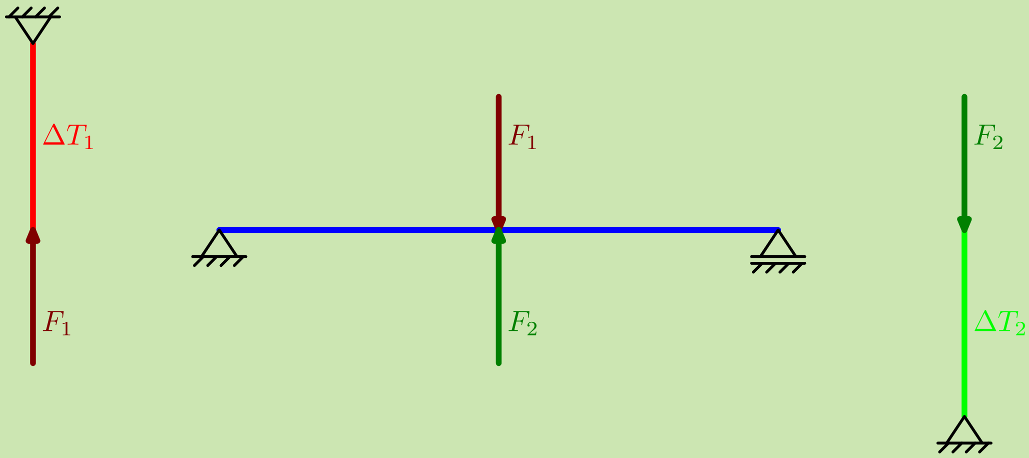
Nosník na dvou podporách délky L_3 je umístěn mezi dvě tyče délky L_1 a L_2, které jsou zahřáty o teplotu ΔT_1 a ΔT_2. Vypočítejte průhyb a napětí v nosníku a tyčích.

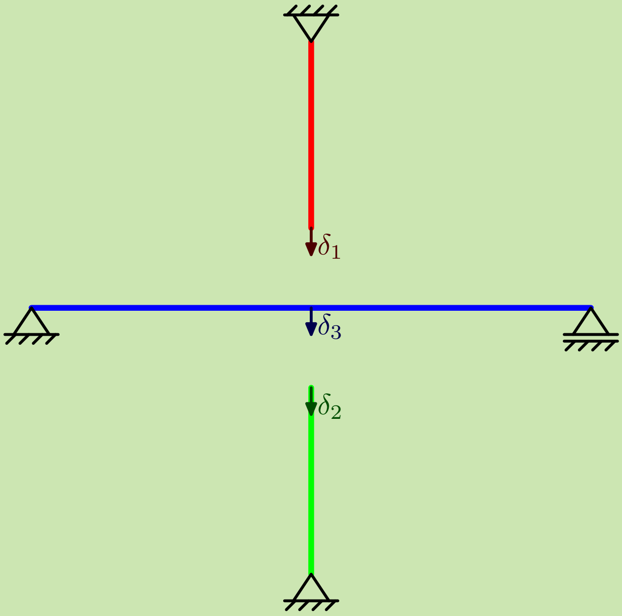


prut délky L_1 je zahřát o teplotu ΔT_1

prut délky L_2 je zahřát o teplotu ΔT_2

Provedeme uvolnění soustavy a nakreslíme zatěžující síly F_1, F_2.





posunutí δ_1 se vypočte

$$\delta_1 = \alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{S_1 E}$$

posunutí δ_2 se vypočte

$$\delta_2 = -\alpha \Delta T_2 L_2 + \frac{F_2 L_2}{S_2 E}$$

průhyb δ_3 se vypočte

$$\delta_3 = \frac{(F_1 - F_2){L_3}^3}{48EI}$$

Pro posunutí a průhyb platí $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$

Získáme dvě rovnice, například: $\delta_1 = \delta_2$, $\delta_1 = \delta_3$ o dvou neznámých F_1 a F_2.

$$\alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{S_1 E} = -\alpha \Delta T_2 L_2 + \frac{F_2 L_2}{S_2 E} \qquad \alpha \Delta T_1 L_1 - \frac{F_1 L_1}{S_1 E} = \frac{(F_1 - F_2){L_3}^3}{48EI}$$

Pro posunutí a průhyb platí $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$

$$F_1 = \frac{\alpha\, S_1 E({L_3}^3\, \Delta T_1\, L_1\, S_2 E + 48\, L_2\, \Delta T_1\, L_1\, EI + {L_3}^3\, \Delta T_2\, L_2\, S_2 E)}{({L_3}^3\, L_1\, S_2 E + 48\, L_2\, L_1\, EI + L_2\, {L_3}^3\, S_1 E)}$$

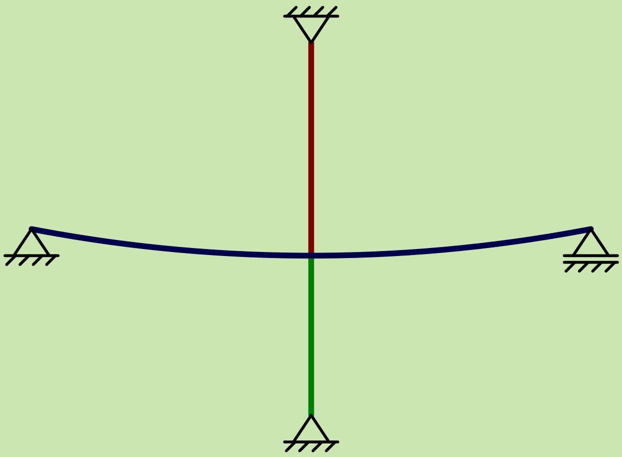
$$F_2 = \frac{\alpha\, S_2 E(48\, L_1\, EI\, \Delta T_2\, L_2 + {L_3}^3\, S_1 E\, \Delta T_1\, L_1 + {L_3}^3\, S_1 E\, \Delta T_2\, L_2)}{({L_3}^3\, L_1\, S_2 E + 48\, L_2\, L_1\, EI + L_2\, {L_3}^3\, S_1 E)}$$

Z vypočtených sil vypočítáme průhyb nosníku δ_3 a napětí v tyčích a nosníku.

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

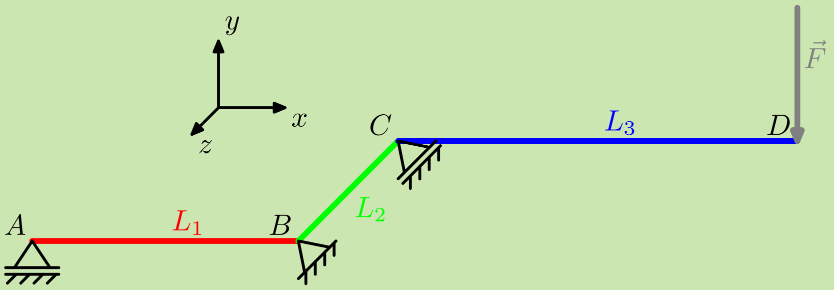
$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{(F_1 - F_2)L_3}{4W_o}$$



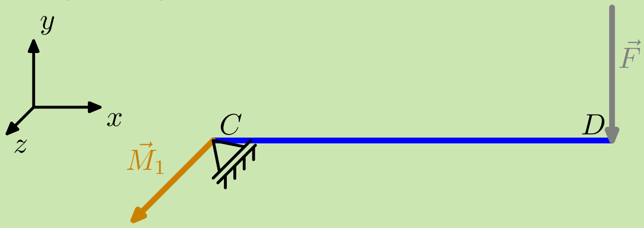
Výsledné posunutí

Výpočet posunutí bodu D a napětí v prutech
Tyč je zalomena dvakrát do pravého úhlu dle obrázku. V bodě D působí síla kolmá na rovinu prutu. Vypočítejte posunutí bodu D ve směru osy y.

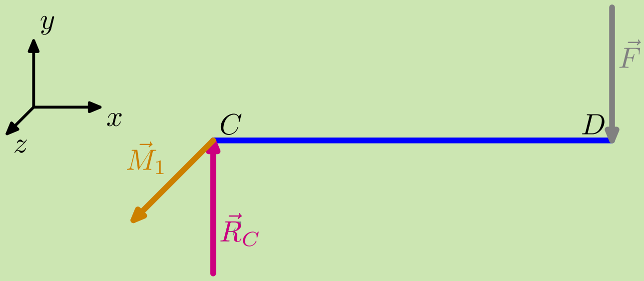


Provedeme rozdělení tyče v ložiskách B a C a v těchto místech zavedeme síly a momenty.

Tyč délky L_3:

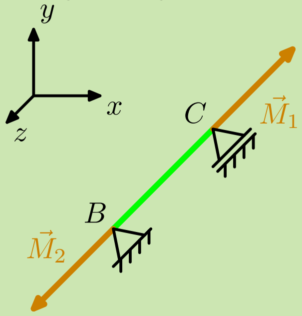


V bodu C působí ohybový moment M_1 tak, aby byla tyč v momentové rovnováze
$M_1 = FL_3$

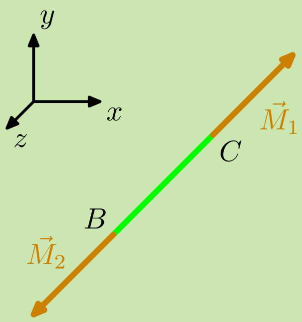


V bodu C odstraníme ložisko a zavedeme reakce ve směru osy x a y. Ve směru osy x je reakce nulová, ve směru osy y je reakce $R_C = F$

Tyč délky L_2:

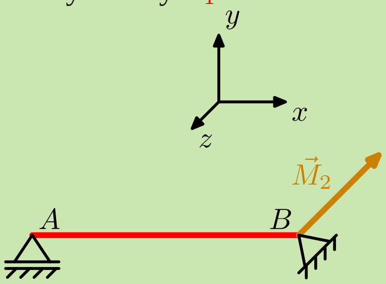


V bodu C působí kroutící moment M_1, který má opačný směr, než u tyče délky L_3. V bodu B působí kroutící moment M_2, který má stejnou velikost a opačný směr $\vec{M}_2 = -\vec{M}_1$

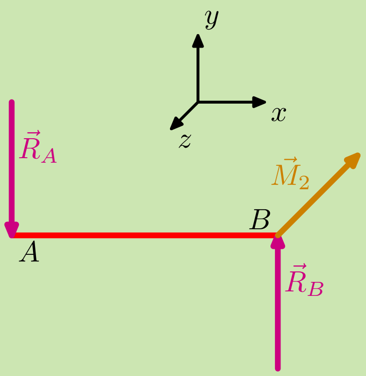


V bodech B a C odstraníme ložisko a zavedeme reakce ve směru osy x a y. Všechny reakce jsou nulové, protože tyč není zatěžována silami, pouze kroutícím momentem.

Tyč délky L_1:

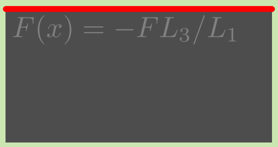


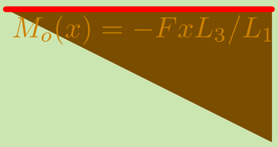
V bodu B působí ohybový moment M_2, který má opačný směr, než u tyče délky L_2.



V bodu B odstraníme ložisko a zavedeme reakce ve směru osy x a y a v bodu A odstraníme obecnou podporu a zavedeme reakci ve směru osy y. Reakce ve směru osy x je nulová. Reakce ve směru y jsou stejně velké opačného směru, tak aby jejich součet byl roven nule a silová dvojice aby působila stejně velký moment opačnéh směru jako M_2.
$R_A = M_2/L_1 = FL_3/L_1$.

Výpočet začneme od tyče délky L_1. Vypočítáme natočení tyče namáhané ohybem v místě B.





$$u_1''(x) = -\frac{FxL_3}{L_1EI_y}$$

$$u_1'(x) = -\int \frac{FxL_3}{L_1EI_y}\,\mathrm{d}x$$

$$u_1'(x) = -\frac{Fx^2L_3}{2L_1EI_y} + C_1$$

$$u_1(x) = -\int \left(\frac{Fx^2L_3}{2L_1EI_y} + C_1\right)\mathrm{d}x$$

$$u_1(x) = -\frac{Fx^3L_3}{6L_1EI_y} + C_1x + C2$$

Okrajové podmínky:
nulové posunutí v bodu $A: u(0) = 0$
nulové posunutí v bodu $B: u(L_1) = 0$

$$C_2 = 0,\, C_1 = \frac{F{L_1}^2L_3}{6L_1EI_y} = \frac{FL_1L_3}{6EI_y}$$

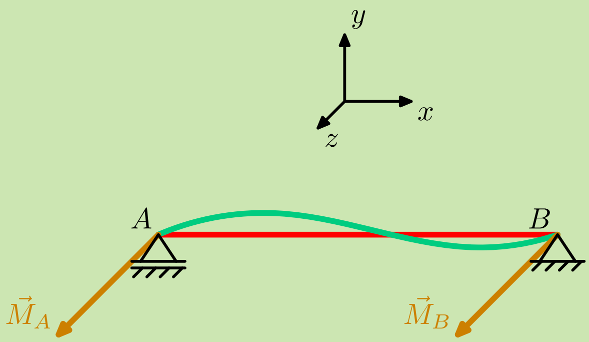
$$u_1(x) = -\frac{Fx^3L_3}{6L_1EI_y} + \frac{FxL_1L_3}{6EI_y}$$

$$\phi_1(x) = u_1' = -\frac{Fx^2L_3}{2L_1EI_y} + \frac{FL_1L_3}{6EI_y}$$

natočení v bodu $B:$

$$\phi_1(L_1) = -\frac{F{L_1}^2L_3}{3L_1EI_y} = -\frac{FL_1L_3}{3EI_y}$$

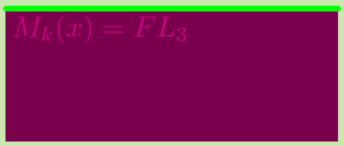
Toto natočení je možné zjistit z tabulek



$$\phi_A = \frac{2M_A - M_B}{6EI}$$

$$\phi_B = \frac{2M_B - M_A}{6EI}$$

Budeme pokračovat výpočtem zkroucení tyče délky L_2. Vypočteme natočení v bodu C které se spočítá jako součet natočení v bodu B a zkroucení tyče mezi body B a C.



$$\phi_2'(z) = \frac{FL_3}{GI_p}$$

$$\phi_2(z) = \int \frac{FL_3}{GI_p}\,\mathrm{d}z$$

$$\phi_2(z) = \frac{FL_3 z}{GI_p} + C_3$$

Okrajové podmínky:

natočení v bodu $B : \phi_2(0) = \phi_1 = -\dfrac{F{L_3}^3}{2L_1}$

$$C_3 = \phi_1(L_1) = -\frac{FL_1L_3}{3EI_y}$$

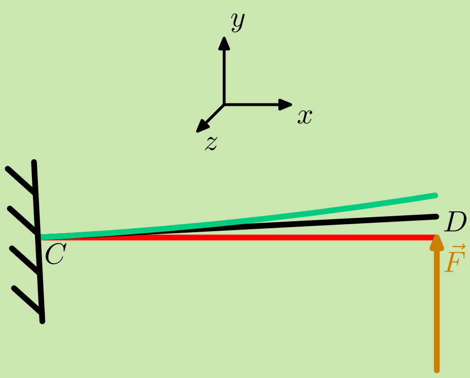
$$\phi_2(z) = \frac{FL_3 z}{GI_p} + \phi_1 = \frac{FL_3 z}{GI_p} - \frac{FL_1L_3}{3EI_y}$$

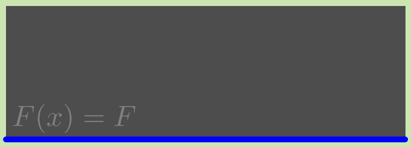
natočení v bodu C :

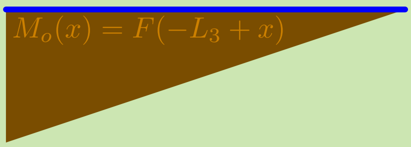
$$\phi_2(-L_2) = -\frac{FL_3L_2}{GI_p} + \phi_1 = -\frac{FL_3L_2}{GI_p} - \frac{FL_1L_3}{3EI_y}$$

Vypočteme posunutí bodu D:

Tyč délky L_3 je v bodu C natočena o úhel ϕ_2 a prohnuta od zatížení silou F.







$$u_3''(x) = F(-L_3 + x)$$
$$u_3'(x) = \int F(-L_3 + x)\,\mathrm{d}x$$
$$u_3'(x) = F\left(-xL_3 + \frac{x^2}{2EI_y}\right) + C_4$$
$$u_3(x) = \int F\left(\left(-xL_3 + \frac{x^2}{2EI_y}\right) + C_4\right)\,\mathrm{d}x$$
$$u_3(x) = F\left(-\frac{x^2L_3}{2} + \frac{x^3}{6EI_y}\right) + C_4x + C_5$$

Okrajové podmínky:

nulové posunutí v bodu $C : u_3(0) = 0$

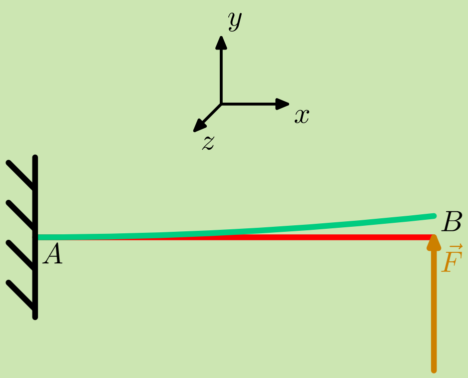
natočení v bodu C :

$$\phi_3(0) = u_3'(0) = \phi_2(-L_2) = -\frac{FL_3x}{GI_p} - \frac{F{L_3}^3}{3L_1EI_y}$$
$$C_5 = 0,\, C_4 = \phi_2(-L_2) = -\frac{FL_3x}{GI_p} - \frac{FL_1L_3}{3EI_y}$$
$$u_3(x) = F\left(-\frac{x^2L_3}{2EI_y} + \frac{x^3}{6EI_y}\right) + \phi_2(-L_2)x$$
$$u_3(x) = -\frac{Fx^2L_3}{2EI_y} + \frac{Fx^3}{6EI_y} - \left(\frac{FL_3L_2}{GI_p} + \frac{FL_1L_3}{3EI_y}\right)x$$

posunutí v bodu D :

$$u_3(L_3) = -\frac{FL_3^3}{3EI_y} - \left(\frac{FL_3L_2}{GI_p} + \frac{FL_1L_3}{3EI_y}\right)L_3$$
$$u_3(L_3) = -F{L_3}^2\left(\frac{L_3}{3EI_y} + \frac{L_2}{GI_p} + \frac{L_1}{3EI_y}\right)$$

Posunutí konce vetknutého nosníku je možné zjistit z tabulek



$$u_B = \frac{FL^3}{3EI}$$

$$\phi_B = \frac{FL^2}{2EI}$$