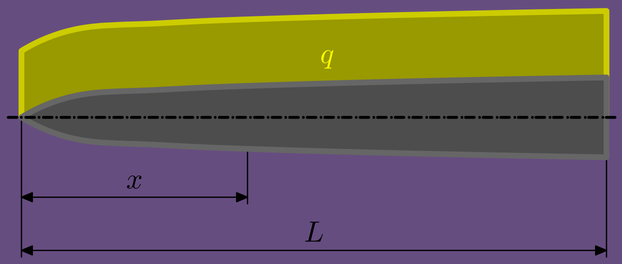
Výpočet průhybu vetknutého nosníku proměnného průřezu pomocí Mohrova integrálu

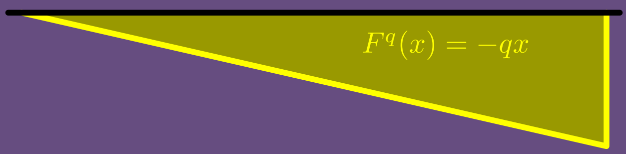
Vetknutý nosník délky L proměnného kruhového průřezu průměru $D(x)$ je zatížen konstantním spojitým zatížením q. Kvadratický moment průřezu v ohybu se mění lineárně se vzdáleností $I_x(x) = I_x(L)x/L$. Navrhněte průměr nosníku v místě vetknutí $D(L)$, je-li napětí rovno napětí dovolenému σ_D. Pomocí průměru $D(L)$ napište rovnici proměnného průměru nosníku $D(x)$. Vypočtětě velikost průhybu na konci nosníku. Zjistěte, zda nedojde na nosníku k překroční dovoleného napětí σ_D.



Pomocí Schwedlerových vět získáme průběh posouvajících sil a momentů

Průběh posouvající síly od spojitého zatížení q

$q(x) = -q$



Průběh posouvající síly od spojitého zatížení q

$$F^q(x) = \int_0^x (-q)\,\mathrm{d}x = -qx + C_1$$

$$F^q(0) = 0 = C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$$

$$F^q(x) = -qx$$

Průběh ohybového momentu od spojitého zatížení q

$$M_o^q(x) = \int_0^x (F^q(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^x (-qx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -qx^2/2 + C_2$$

$$M_o^q(0) = 0 = C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

$$M_o^q(x) = -qx^2/2$$

Výpočet průměru vetknutého nosníku $D(L)$ v místě vetknutí

$$\sigma_o(L) = \frac{M_o^q(L)}{W_o(L)} \leq \sigma_D$$

$$W_o(L) \geq \frac{M_o^q(L)}{\sigma_D}$$

$$\frac{\pi D^3(L)}{32} \geq \frac{M_o^q(L)}{\sigma_D}$$

$$D^3(L) \geq \frac{32 M_o^q(L)}{\pi \sigma_D}$$

$$D^3(L) \geq \frac{32 q L^2}{2\pi \sigma_D}$$

$$D(L) \geq \left(\frac{16qL^2}{\pi\sigma_D}\right)^{1/3}$$

Výpočet průměru vetknutého nosníku $D(x)$

$$I_x(L) = \frac{\pi D^4(L)}{64}$$

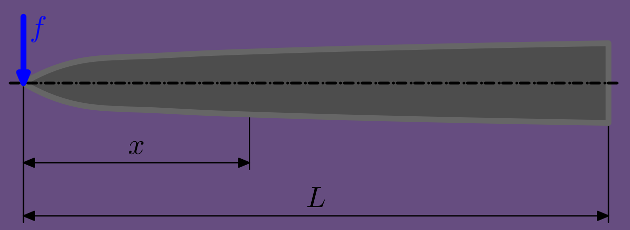
$$I_x(x) = I_x(L)\frac{x}{L}$$

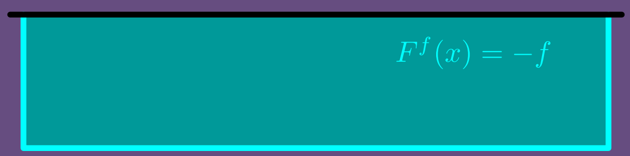
$$\frac{\pi D^4(x)}{64} = \frac{\pi D^4(L)}{64}\frac{x}{L}$$

$$D(x) = \left(D^4(L)\frac{x}{L}\right)^{1/4}$$

$$D(x) = D(L)\left(\frac{x}{L}\right)^{1/4}$$

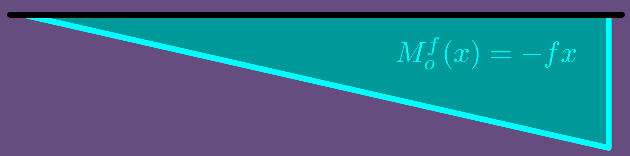
Pro výpočet průhybu pomocí Mohrova integrálu zavedeme jednotkovou sílu $f = 1$ v místě, kde chceme vypočítat průhyb





Průběh posouvající síly od jednotkové síly f

$F^f(x) = -f$



Průběh ohybového momentu od jednotkové síly f

$$M_o^f(x) = \int_0^x (-f)\,\mathrm{d}x = -fx + C_3$$

$$M_o^f(0) = 0 = C_3 \;\Rightarrow\; C_3 = 0$$

$$M_o^f(x) = -fx$$

Posunutí u je dle Mohrova integrálu rovno

$$u = \int_0^L \frac{M_o^q(x)M_o^f(x)}{EI_x(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$u = \int_0^L \frac{(-qx^2/2)(-fx)}{EI_x(L)x/L}\,\mathrm{d}x$$

$$u = \frac{qfL}{2EI_x(L)} \int_0^L \frac{x^3}{x} \,\mathrm{d}x$$

$$u = \frac{qfL}{2EI_x(L)} \int_0^L x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$u = \frac{qfL}{2EI_x(L)} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{qfL}{2EI_x(L)} \frac{L^3}{3} = \frac{qfL^4}{6EI_x(L)} = \frac{qL^4}{6EI_x(L)}$$

Výpočet modulu průřezu v ohybu $W_o(x)$

$$W_o(x) = \frac{\pi D^3(x)}{32} = \frac{\pi D^3(L)}{32} \left(\frac{x}{L}\right)^{3/4}$$

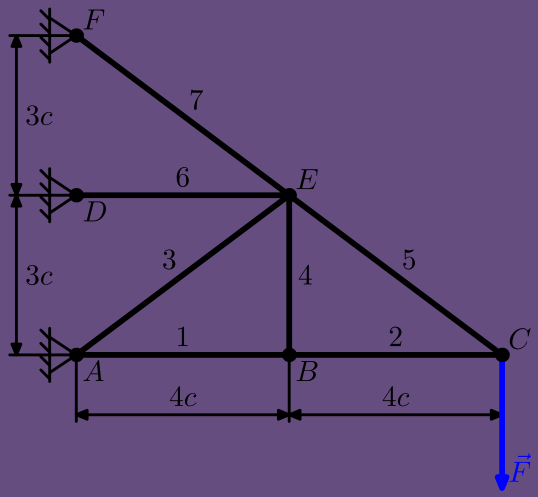
Vypočteme průběh ohybového napětí $\sigma_o(x)$

$$\sigma_o(x) = \frac{M_o^q(x)}{W_o(x)} = \frac{\frac{qx^2}{2}}{\frac{\pi D^3(L)}{32}\left(\frac{x}{L}\right)^{3/4}} = \frac{16qx^{5/4}L^{3/4}}{\pi D^3(L)} = \frac{16qL^{3/4}}{\pi D^3(L)} x^{5/4}$$

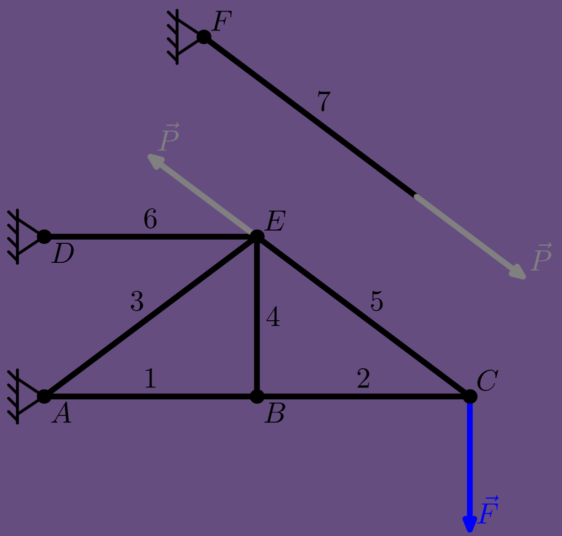
$$\frac{16qL^{3/4}}{\pi D^3(L)} x^{5/4} \leq \frac{16qL^2}{\pi D^3(L)} \qquad \text{pro } x \leq L$$

Ohybové napětí $\sigma_o(x)$ je pro $x < L$ menší než dvolené napětí.

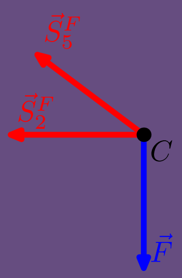
Vypočtěte zatížení prutů staticky neurčité prutové soustavy.

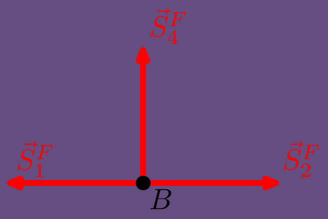


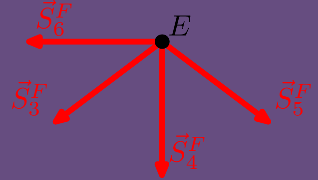
Ze staticky neurčité prutové soustavy vytvoříme staticky určitou prutovou soustavu tak, že odstraníme prut 7, který nahradíme silou P. Prut 7 je namáhán silou P.



Vytvoříme rovnice rovnováhy ve styčnících pro zatížení silou $\vec{F}$







Bod C

$$\sum F_x = 0 \qquad -S_2^F - 4/5 S_5^F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 3/5 S_5^F - F = 0$$

Bod B

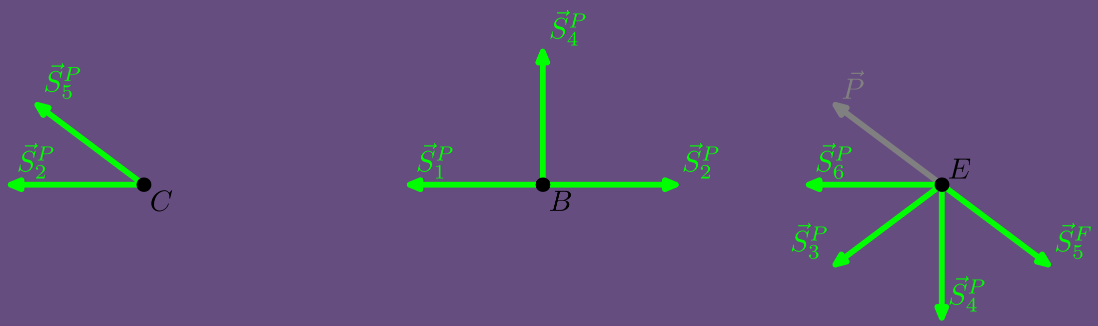
$$\sum F_x = 0 \qquad -S_1^F + S_2^F = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad S_4^F = 0$$

Bod E

$$\sum F_x = 0 \qquad -4/5S_3^F + 4/5S_5^F - S_6^F = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad -3/5S_3^F - S_4^F - 3/5S_5^F = 0$$

Řešení: $S_1^F = -4/3F,\ S_2^F = -4/3F,\ S_3^F = -5/3F,\ S_4^F = 0,\ S_5^F = 5/3F,\ S_6^F = 8/3F$

Vytvoříme rovnice rovnováhy ve styčnících pro zatížení silou $\vec{P}$



Bod C

$$\sum F_x = 0 \qquad -S_2^P - 4/5S_5 = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad 3/5S_5^P = 0$$

Bod B

$$\sum F_x = 0 \qquad -S_1^P + S_2^P = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad S_4^P = 0$$

Bod E

$$\sum F_x = 0 \qquad -4/5S_3^P + 4/5S_5^P - S_6^P - 4/5P = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad -3/5S_3^P - S_4^P - 3/5S_5^P + 3/5P = 0$$

Řešení: $S_1^P = 0,\ S_2^P = 0,\ S_3^P = P,\ S_4^P = 0,\ S_5^P = 0,\ S_6^P = -8/5P$

Celkové zatížení prutu je: $S_i = S_i^F + S_i^P$
$S_1 = -4/3F,\ S_2 = -4/3F,\ S_3 = -5/3F + P,\ S_4 = 0,\ S_5 = 5/3F,\ S_6 = 8/3F - 8/5P$
Síla v prutu 7 je $S_7 = P$

Délky prutů: $L_1 = 4c,\ L_2 = 4c,\ L_3 = 5c,\ L_4 = 4c,\ L_5 = 5c,\ L_6 = 4c,\ L_7 = 5c$

Vypočteme energii prutové soustavy a zderivujeme ji podle síly P a tuto derivaci položíme rovnu nule a tím získáme velikost síly P.

$$U_i = \frac{S_i^2}{2k_i} = \frac{S_i^2 L_i}{2ES}$$

$$U = \sum_{i=1}^{7} U_i = \sum_{i=1}^{7} \frac{S_i^2}{2k_i} = \frac{1}{2ES} \sum_{i=1}^{7} S_i^2 L_i$$

$$U = \frac{1}{2ES}\Big[(-4/3F)^2 4c + (-4/3F)^2 4c + (-5/3F + P)^2 5c + (0)^2 3c +$$
$$+ (5/3F)^2 5c + (8/3F - 8/5P)^2 4c + (P)^2 5c\Big]$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2ES}[0 + 0 + 2(-5/3F + P)5c + 0 + 0 - 16/5(8/3F - 8/5P)4c + 2(P)5c]$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2ES}\left[-\frac{50}{3}Fc + 10Pc - \frac{512}{15}Fc + \frac{512}{25}Pc + 10Pc\right] = \frac{c}{2ES}\left[\frac{-762}{15}F + \frac{1012}{25}P\right] = 0$$

$$\frac{-762}{15}F + \frac{1012}{25}P = 0$$

$$P = \frac{635}{506}F$$

Provedeme dosazení a vypočítáme velikosti sil v prutech.

$$S_1 = -\frac{4}{3}F = -1.333333333F$$

$$S_2 = -\frac{4}{3}F = -1.333333333F$$

$$S_3 = -\frac{625}{1518}F = -0.4117259552F$$

$$S_4 = 0$$

$$S_5 = \frac{5}{3}F = 1.666666667F$$

$$S_6 = \frac{500}{759}F = 0.6587615283F$$

$$S_7 = \frac{635}{506}F = 1.254940711F$$